連続体力学応用の方針について

・オンライン化に伴って5回の講義・演習＋最終課題（1回分）
・講義テキストが完成次第専用のページにアップします。
・連続体力学基礎のテキストをアップしました。
　PWはseimitsurenzokutaiです。
・授業では、予習を前提とした説明と演習とするつもりです。

１回目：連続体力学基礎の復習
　講義：基礎方程式の復習
　演習・課題：ベルヌーイの定理の利用問題
２回目：ナヴィエの式の導出
　講義：ナヴィエの式の導出
　演習・課題：ナヴィエの式を利用した材料力学演習
３回目：固体の中を伝わる振動波の導出
　講義：波動方程式の導出
　演習・課題：振動波のシミュレーション
４回目：ナヴィエ・ストークスの方程式
　講義：ナヴィエストークスの方程式の導出
　演習：ナヴィエストークスの解析解を利用した計算
５回目：乱流と層流
　講義：乱流と層流
　演習：円管流れの計算

最終実験課題：円管流れの流体実験

連続体力学応用の方針について

- 三村のメールアドレス（mimura@edm.t.u-tokyo.ac.jp)まで
  レポートを提出ください。次の回までに提出頂くとありがたいです。

- メールの振り分け機能を使うので、件名、ファイル名ともに、

  連続体力学応用レポート三村秀和1回目　という名前にしてください。

- 課題1～5の解答例は専用ページにアップする予定です。

第1回
連続体力学基礎の復習

学問体系　連続体力学の位置づけ　1

力学　（$ma = F$）

電磁気学　（マクスウェルの方程式　電場　磁場）

↓

光学　（波　フォトン）

量子力学　（電子の動き　波動関数）

質量小

相対性理論　（光速一定）

速度大　重力大

統計力学（数学？）

解析学

ベクトル解析
rot. grad. div

シュレディンガー方程式
不確定性原理

大学の各物理学は、それを支える方程式数学が何かを理解する必要がある。
連続体力学の場合ベクトル解析である。
ベクトル解析は「場」の物理量を取り合うかうための数学

学問体系　連続体力学の位置づけ　２

力学

- 機械力学　振動　回転　剛体 ← 解析学（微分積分　フーリエ変換）
- 連続体力学
  - 流体力学
  - 材料力学

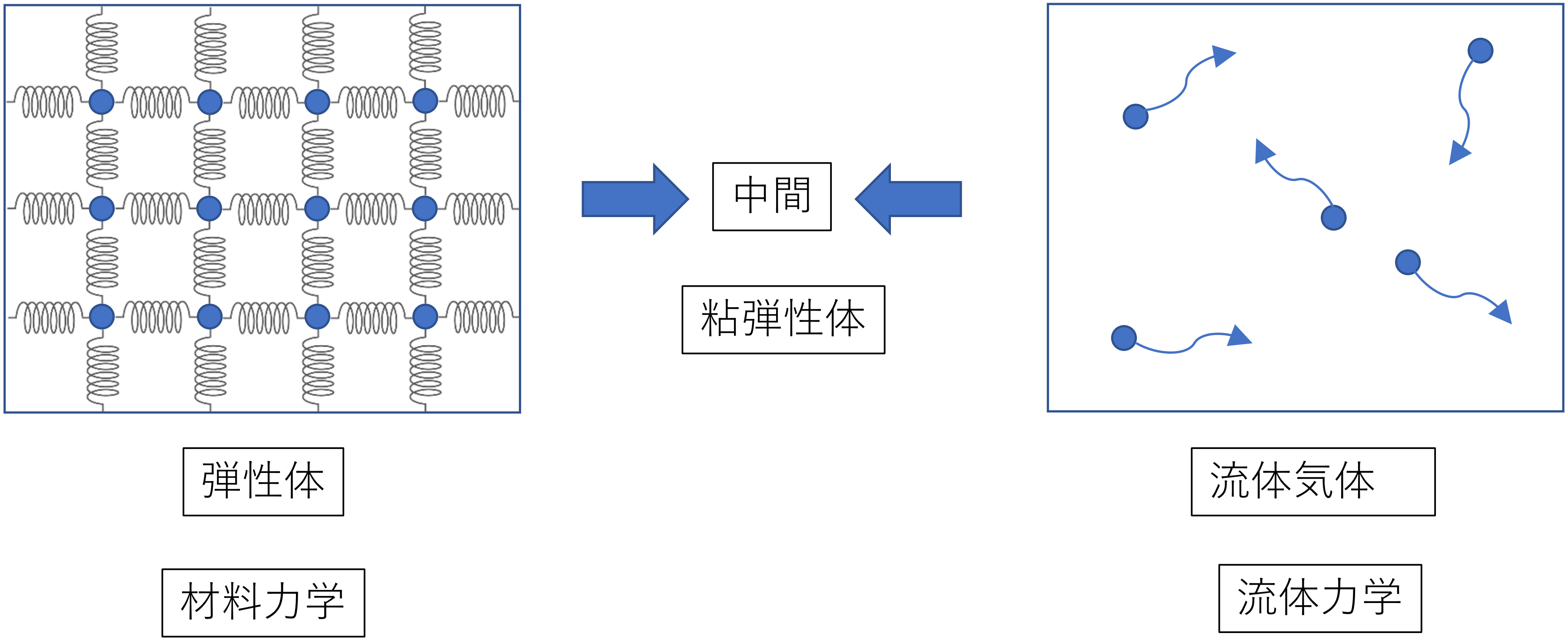
ベクトル解析

- 熱力学？ ← 統計確率

物理現象を如何に数学で表現するか？

➡ 連続体力学は数学的には電磁気学に近い

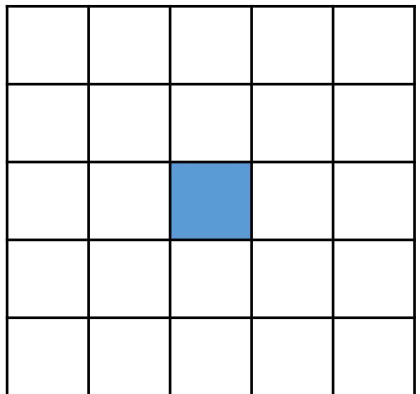
連続体のイメージ

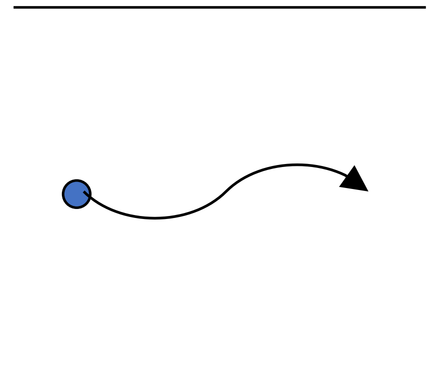


物で見るか？　場で見るか？

オイラー的記述法

ラグランジュ的記述法





空間で見る
（電磁気学的）
・ベクトル解析
・線形数学

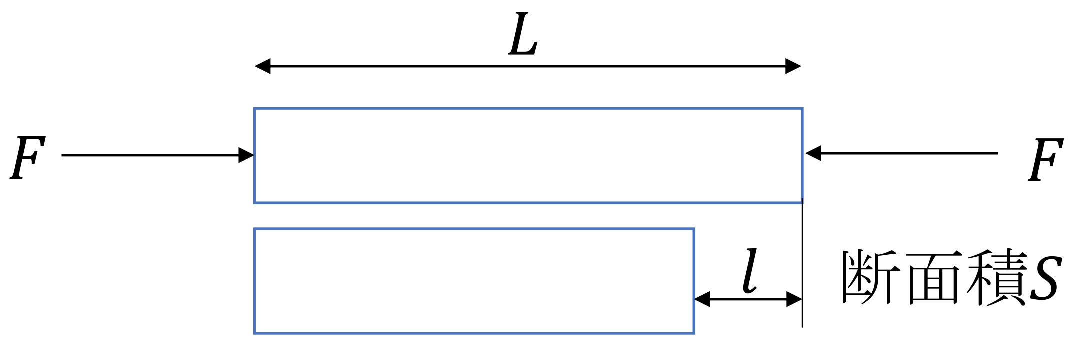
粒子の動きを見る
（力学的）
・解析力学

基本の方程式　　基本法則３つ

☆質量保存の法則	→	・連続の式
☆運動量保存の法則	→	・運動方程式　・オイラーの方程式 ・ナヴィエの式　・ナヴィエストークスの式
☆作用反作用の法則	→	・力の釣り合い

一次元の材料力学

１次元の伸縮問題



$$\frac{l}{L}S = \frac{F}{E}$$

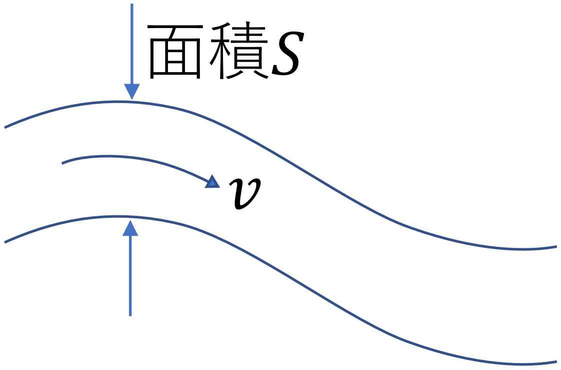
E: ヤング率

$$\frac{l}{L} = \frac{F/S}{E}$$

ひずみ $\varepsilon = \dfrac{\sigma(x,t)}{E}$ 応力

イプシロン

一次元の流体力学



連続の式vS = 一定

$$v(x,t)S(x) = a$$

a: 流量

エネルギー保存の式(ベルヌーイの定理)

$$\frac{1}{2}\rho(x,t)v(x,t)^2 + P(x,t) = b$$

断面積分布から流速分布が求まる。
流速分布が求まると圧力分布が求まる。

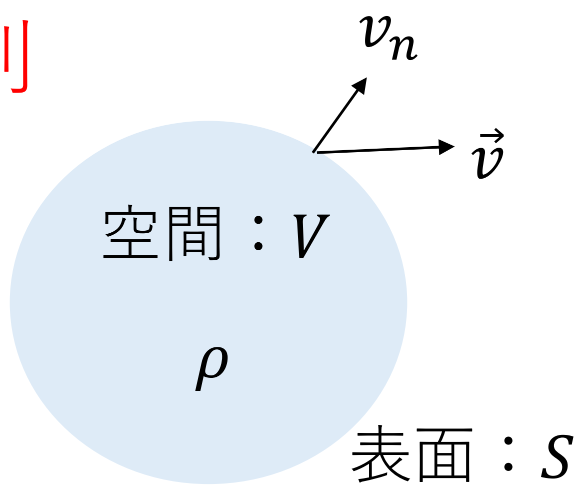
前提

$\vec{v}, \rho$ などの物理量は、x, y, z, t　の関数

実際は $\boxed{\overrightarrow{v(x,y,z,t)}, \rho(x,y,z,t)}$ と表現

$$\boxed{\overrightarrow{v(x,y,z,t)} = (u(x,y,z,t), v\,(x,y,z,t), w\,(x,y,z,t))}$$

流体力学における質量保存の法則



v_n ：流速$\vec{v}$の$\vec{n}$成分

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$$

ρ：密度

とおくと
S面からの単位時間あたりの流出量は

$$\boxed{\iint_S \rho v_n dS}$$

領域Vの中の質量変化は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = -\iint_S \rho v_n dS = -\iiint_V div(\rho\vec{v})dV}$$

Gaussの定理

流体力学における質量保存の法則

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{d\rho}{dt} + div(\rho\vec{v})\right) dV = 0}$$

したがって、あらゆる空間の定義でも成り立つためには

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + div(\rho\vec{v}) = 0}$$

ρが一定の時

$$\boxed{div\,\vec{v} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

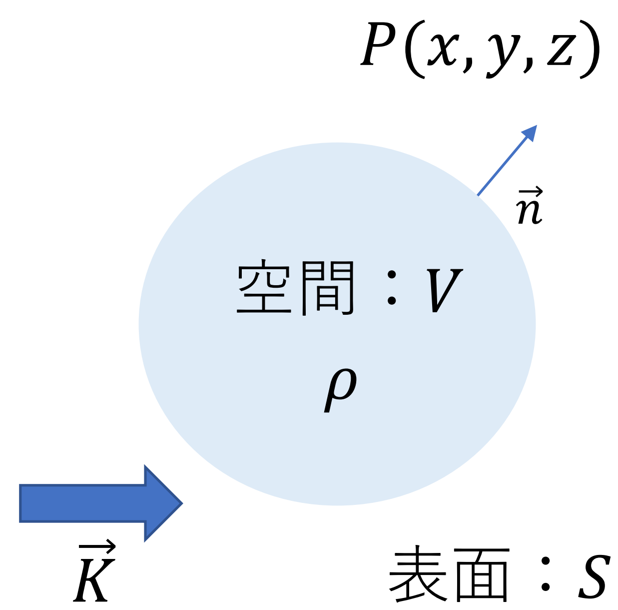
流体力学における運動方程式

$m\vec{a} = \vec{F}$ 　ニュートンの方程式

まずは右辺の力について

圧力分布による力
(圧力勾配がプラスの時マイナス方向に力が働く）

$$\boxed{-\iint_S P\vec{n}dS}$$



外力
（例えば重力）

$$\boxed{\iiint_V \vec{K}\rho dV}$$

流体力学における運動方程式

ひとまず空間V全体の加速度を$\vec{a}$とする
ニュートンの方程式から

$$\iiint_V \rho dV \cdot \vec{a} = \iiint_V \rho \vec{K} dV - \iint_S P\vec{n} dS$$

$\vec{a}$を積分の中に入れ、$\vec{K}$　とまとめると

$$\iiint_V \rho(\vec{K} - \vec{a}) dV - \iint_S P\vec{n} dS = 0$$

Gaussの定理より

$$\iint_S P\vec{n} dS = \iiint_V grad\, P dV$$

$$\iiint_V \{\rho(\vec{K} - \vec{a}) - grad\, P\} dV = 0$$

加速度$\vec{a}$を微小空間の加速度とし、あらゆる空間で成り立つ

$$\rho(\vec{K} - \vec{a}) - grad\, P = 0$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} grad P \quad ①$$

Lagrange微分による加速度の表現

Fを速度$\vec{v}$とした場合

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D^2\vec{r}}{Dt^2} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}}$$

あくまでも$\vec{r}$や$\vec{v}$は流体粒子が持つ物理量であり,

$\frac{D\vec{r}}{Dt}, \frac{D\vec{v}}{Dt}$　はその時間変化を表す

Lagrange微分を利用した流体力学における運動方程式の記述

ラグランジェ微分は下記で表される

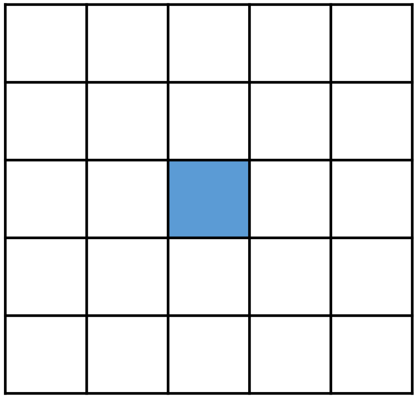
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$grad = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot grad$$

Lagrange微分

オイラー的記述法



$$\overrightarrow{v(x, y, z, t)}$$

流体粒子の加速度は

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot grad)\vec{v}$$

①より

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot grad)\vec{v} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} gradP$$

オイラー方程式

Lagrange微分を利用した流体力学における運動方程式の記述

$$\overrightarrow{v(x,y,z,t)} = (u(x,y,z,t), v\,(x,y,z,t), w\,(x,y,z,t))$$

$\vec{K} = (X, Y, Z)$と

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot grad)\vec{v} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} gradP$$

から

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}}$$

速度勾配テンソル

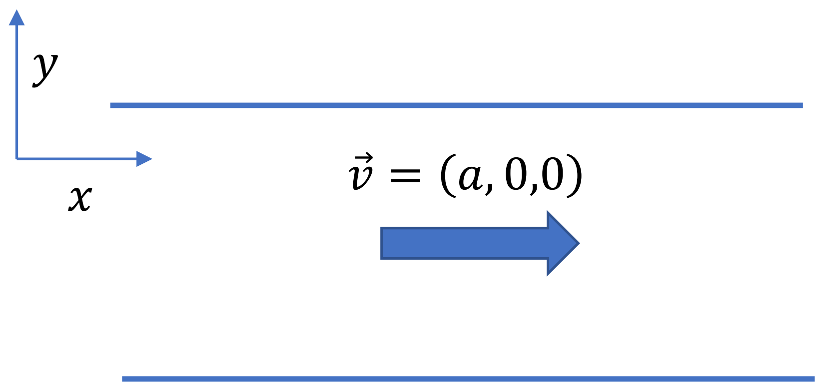
$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

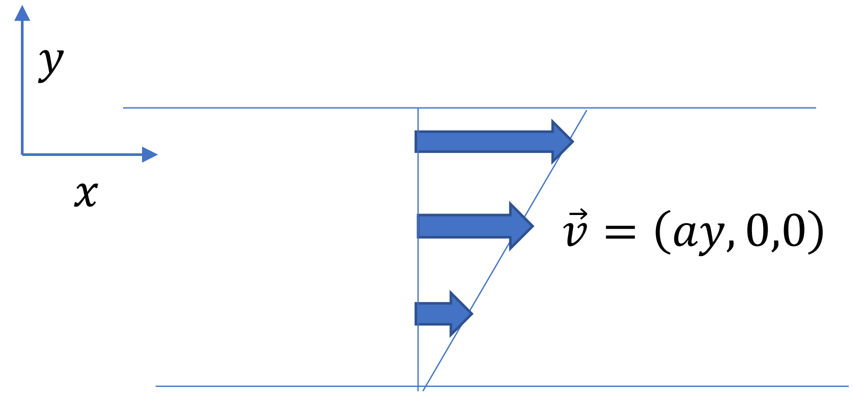
D:速度勾配テンソル

$d\vec{v} = (du, dv, dw)$ および $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ とすると

$$\boxed{d\vec{v} = \mathbf{D} d\vec{r}}$$

速度勾配テンソルの例





等速流れの場合

$$\overrightarrow{v(x, y, z, t)} = (a, 0, 0)$$

速度勾配テンソル

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

y方向でx成分の速さのみ変化する場合

$$\overrightarrow{v(x, y, z, t)} = (ay, 0, 0)$$

速度勾配テンソル

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = a dy$$

各座標において速度勾配テンソルが存在する。
速度勾配テンソルにより流れ（の性質）を表現できる。

速度勾配テンソルの分解

速度勾配テンソルの対称テンソルと反対称テンソルの分解

速度勾配テンソル$\mathbf{D}$
の転置行列(transpose)を$\widetilde{\mathbf{D}}$とする。

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \widetilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\widetilde{D}$を用いてDを次のよう変形をする

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} + \widetilde{\mathbf{D}}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{D}}\right) = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} + \widetilde{\mathbf{D}}\right) \qquad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{D}}\right)$$

速度の微小変化は二つの成分に分かれる

$$d\vec{v} = \mathbf{D}d\vec{r} = \mathbf{E}d\vec{r} + \mathbf{\Omega}d\vec{r}$$

速度勾配テンソルの分解

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \widetilde{\mathbf{D}}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix}$$ とおくと

$$\boxed{e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}}$$

$$\boxed{e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)}$$

$$\boxed{e_{zx} = e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)}$$

$$\boxed{e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

E は対称テンソル

速度勾配テンソルの分解

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{D}}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}\right)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & \Omega_{xz} \\ \Omega_{yx} & \Omega_{yy} & \Omega_{yz} \\ \Omega_{zx} & \Omega_{zy} & \Omega_{zz} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{ゼータ} & \text{エータ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{クシー} \\ \\ \end{array}$$

とおくと

$$\boxed{(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} rot(u, v, w) = \frac{1}{2} rot\vec{v}}$$

$\boldsymbol{\Omega}$は反対称テンソル

おまけ：個人的な見解

疑問：なぜ物理量の偏微分での表記の意味を理解しなければならないのか？

$$D=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

見解：基本的に場の物理量を表現する方程式が空間の微分形式で
記述されているため

微分形は分かりにくいが積分形にすると直感で理解できる。
しかし、単純な形でしか積分形にできない。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot grad)\vec{v}=\vec{K}-\frac{1}{\rho}grad\ P$$

渦なし流れと速度ポテンシャル

$rot\vec{v} = 0$ とする。渦なし流れの条件

$$\boxed{rot(grad\, f) = 0}$$ より

$$\boxed{\vec{v} = grad\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)}$$

Φ:速度ポテンシャル

により、Φを定義することができる。

また、

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = grad\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)} \tag{3}$$

オイラーの運動方程式の変形

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot grad)\vec{v} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} gradP} \tag{4}$$

(3)より

$$\boxed{grad|\vec{v}|^2 = 2(\vec{v}\cdot grad)\vec{v} + 2(\vec{v}\times rot\vec{v})}$$

$$\boxed{(\vec{v}\cdot grad)\vec{v} = grad\frac{1}{2}|\vec{v}|^2 - \vec{v}\times rot\vec{v}} \tag{5}$$

(4)に(5)を代入

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{K} - grad\frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + \vec{v}\times rot\vec{v} - grad\,P'}$$

$$\left(gradP' = \frac{1}{\rho} grad\,P \text{とおく}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{K} - grad\left(P' + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) + \vec{v}\times rot\vec{v}} \tag{6}$$

ベルヌーイの定理の導出

$rot\vec{v} = 0$の時

(1)を(6)に代入をして

$$\boxed{grad\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \vec{K} - grad\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + P'\right)}$$

$$\boxed{\vec{K} = grad\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + P'\right)}$$

ここで

$$\boxed{\vec{K} = -grad\,\Omega}$$

（Ω:ポテンシャルエネルギー
ポテンシャルエネルギーの場合
負号をつける）

とすると

$$\boxed{grad\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + P' + \Omega\right) = 0} \qquad (7)$$

ベルヌーイの定理の導出

(7)より

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + P' + \Omega = f(t)} \qquad \text{圧力方程式} \qquad (8)$$

定常流れかつρが一定とすると

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad f(t) = const. \qquad P' = \frac{1}{\rho}P\text{より}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + \frac{P}{\rho} + \Omega = const.} \qquad (9)$$

$\Omega = gz$の時←重力ポテンシャル

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + P + \rho g z = const.} \qquad (10)$$

ベルヌーイの定理の導出

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + P + \rho g z = const.}$$

・非粘性・非圧縮流体の流れ
・定常な流れ
・渦なし流れ
・一様な重力
の時

上式で示される“ベルヌーイの定理”が成り立つ

演習課題：ベルヌーイの定理の応用
ベンチュリ効果

課題1　ベンチュリ効果の計算

水が流れる管の直径が変化する時、管の進行方向における流速分布と圧力分布をもとめよ。

流量および断面積の変化は自分で与えること。

水の密度：入り口圧力は2atm程度

・連続の式から流速×断面積は一定。
・流速が分かれば、ベルヌーイの式から圧力分布を求まる。

課題2　ベンチュリ効果の応用例について

流速が上がると圧力が下がる効果をベンチュリ効果という

ベンチュリー効果の応用例について調べよ。

4月17日までに提出ください。